

الزمرة: G تكون مجموعة غير خالية ولنصف على قانون تشكيلي داخلي $\circ$

(تطبيق من الجداء الديكارتي $G \times G$ إلى المجموعة G)

$$\circ: G \times G \rightarrow G$$

$$(x, y) \mapsto \circ(x, y) = x \circ y$$

والذي يحقق الشروط الثلاثة التالية:

$$1- \circ \text{ تجميعي: } \forall f, g, h \in G, (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

2- يوجد في G عنصر محايد e بالنسبة للقانون $(\circ)$ أي أن:

$$\forall g \in G: g \overset{\text{تكملة}}{\circ} e = e \circ g = g$$

3- لكل عنصر g من G يوجد نظير (مقلوب) g' بالنسبة للقانون $(\circ)$

$$\forall g \in G \Rightarrow \exists g' \in G, g' \circ g = g \circ g' = e$$

عندئذ تدعى الثنائية $(G, \circ)$ زمرة

* أمثلة عددية:

1- لنأخذ: $G = \mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$ ولنصف على قانون التشكيلي الداخلي

$$+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(m, n) \mapsto + (m, n) = m + n$$

فتبين بسهولة أن القانون $(+)$ تجميعي ويوجد عنصر محايد في $\mathbb{Z}$ بالنسبة $(+)$ وهو (0) .

كما أنه يوجد لكل عدد صحيح n من $\mathbb{Z}$ نظير بالنسبة للقانون $(+)$ وهو $-m$ إذن $(G, +)$ زمرة.

2- نلاحظ أن قانون الضرب $(\cdot)$ على $\mathbb{Z}$ هو قانون تشكيلي داخلي لأن:

$$\therefore \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(m, n) \mapsto m \cdot n$$

غير أن الثنائية $(\cdot)$ لا تشكل زمرة بالنسبة للضرب لأنه لا يوجد لكل عنصر من $\mathbb{Z}$ مقلوب بالنسبة للضرب.

مثلاً: 2 ليس له مقلوب في $\mathbb{Z}$ لأن $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} ; a, b \in \mathbb{Z} ; b \neq 0 \right\}$$

تشكل زمرة بالنسبة للجمع (+) كما تشكل (G*, .) زمرة

(R, +) زمرة و (R*, x) زمرة

(C, +) زمرة و (C*, x) زمرة

عقدية

زمرة البواقي

لنكن $\mathbb{Z}$ ولنعرف على العلاقة ($\sim_n$) حيث n عدد صحيح ثابت $n \geq 1$ كما يلي:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \sim_n y \Leftrightarrow x - y = kn \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

* نحقق أن العلاقة هي علاقة تكافؤ انعكاسية، تناظرية، متعدية

1- واضح أن $x \sim_n x$ لأن $x - x = 0 = 0n$ يقبل القسمة على n

2- إذا كان $x \sim_n y$ فإن $y \sim_n x$ لأنه إذا كان $x - y = kn$ يقبل القسمة على n

فإن $y - x = -kn$ أيضاً تقبل القسمة على n

بلغة ثانية:

لأنه إذا كان $x - y = kn$ فإن $y - x = (-k)n$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

3- إذا كان $x \sim_n y$ و $y \sim_n z$ فإن $x \sim_n z$ لأنه إذا كان

$x - y = kn$ و $y - z = ln$ حيث $k, l \in \mathbb{Z}$ فإن:

$$x - z = x - y + y - z = kn + ln = (k + l)n = rn ; r \in \mathbb{Z}$$

إذاً العلاقة $\sim_n$ على $\mathbb{Z}$ هي علاقة تكافؤ

وبذلك يتجزأ المجموعة $\mathbb{Z}$ إلى صفوف تكافؤ وهي:

$$\bar{0} = \{ 0, \pm n, \pm 2n, \dots \} \quad x = 0 + kn$$

من القانون:

$$x - y = kn$$

$$\bar{1} = \{ 1, 1 \pm n, 1 \pm 2n, 1 \pm 3n, \dots \} \quad x = 1 + kn$$

$$\bar{2} = \{ 2, 2 \pm n, 2 \pm 2n, 2 \pm 3n, \dots \}$$

⋮

$$\overline{n-1} = \{ n-1, n-1 \pm n, \dots \}$$

وهكذا

من الـ هل مد مظه أن : $Z \subseteq U \bar{n} - 1$ $K = \bar{0} \cup \bar{1} \cup$
 بقي أن نبرهن أن $Z \subseteq K$ لذلك نفرض أن $a \in Z$ والمطلوب
 أن $a \in K$:

بما أن $a \in \bar{a}$ ولكن $\bar{a} \in K$ إذن $a \in K$ مما تقدم به أن $K = Z$
 وبذلك فإن صفوف التكافؤ الداخلية في الاصطلاح K تشكل تجزئة في
 مجموعة الأعداد الصحيحة (تجزئة تعين بـ) تقاطع أي مجموعتين هيرثيين $\neq \emptyset$
 برهن إذا كان $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ فإن $\bar{a} = \bar{b}$ *